

# هو العليم

جوینده دانش در پناه عنایت خداوند است.

پیامبر اعظم (ص)

نخبه آن کسی است که بتواند برجستگی خودش را بدون ادعا با شخصیت خود، با هویت خود و با ذات خود به دیگران تفهیم کند.

مقام معظم رهبری

## آزمون دارای نمره منفی می باشد.

### عملکرد اعضای باشگاه دانش پژوهان بسیج در ابتدای تأسیس تا سال ۸۶-۸۷

المپیاد جهانی			المپیاد کشوری			سال	ردیف
برنز	نقره	طلا	برنز	نقره	طلا		
۱	۴	۲	۱۴	۲	۹	۸۰-۸۱	۱
۱	۳	۳	۱۳	۲۲	۱۰	۸۱-۸۲	۲
۱	۹	۲	۱۷	۲۳	۲۱	۸۲-۸۳	۳
۰	۷	۵	۱۴	۲۷	۲۰	۸۳-۸۴	۴
۳	۷	۱	۱۰	۲۵	۲۶	۸۴-۸۵	۵
۲	۶	۳	۱۷	۲۸	۲۲	۸۵-۸۶	۶
۹	۷	۲	۳۴	۲۴	۲۱	۸۶-۸۷	۷
۱۷	۳۳	۱۸	۱۱۹	۱۵۱	۱۲۹	جمع کل	

باشگاه دانش پژوهان بسیج آمادگی دارد در راستای توسعه المپیاد علمی در سراسر کشور خدمات زیر را به دانش پژوهان ارائه نماید:

- برگزاری المپیاد علمی بسیج در سراسر کشور
- برگزاری آزمون المپیاد در مراکز استانها
- برگزاری کلاسهای آمادگی المپیاد در سراسر کشور
- تهیه و تدوین جزوات کمک آموزشی در زمینه المپیادهای علمی
- مشاوره آموزشی در زمینه المپیادهای علمی

تلفن: ۰۲۱ - ۸۸۸۲۹۰۳۵ فاکس: ۰۲۱ - ۸۸۸۲۹۵۲۲

نشانی اینترنتی: [www.Razmandegan.org.ir](http://www.Razmandegan.org.ir)

۱- معادله‌ی  $\frac{x^2 + 12x + 4}{x + 2} = 6\sqrt{x}$  در مجموعه‌ی اعداد حقیقی دارای چند جواب است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۲- در بسط  $(1 + x + \dots + x^{14})^2 (1 + x + x^2 + \dots + x^{27})$ ، ضریب  $x^{28}$  چند است؟

- (۱) ۱۹۵ (۲) ۱۹۶ (۳) ۲۲۴ (۴) ۳۷۸

۳- دنباله  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots$  از نقاط صفحه در رابطه  $(\sqrt{3}a_n - b_n, \sqrt{3}b_n + a_n) = (a_{n+1}, b_{n+1})$  صدق می‌کند. فرض کنید  $(a_1, b_1) = (2, 4)$ .  $(a_{100}, b_{100})$  چند است؟

- (۱)  $-\frac{1}{297}$  (۲)  $-\frac{1}{299}$  (۳) ۰ (۴)  $\frac{1}{298}$

۴- این دستگاه معادلات چند جواب حقیقی  $(x, y)$  است؟  

$$\begin{cases} \sin^3 x + \sin^3 y = (\cos^3 x + \cos^3 y) \tan^3(x + y) \\ \cos^2 x + \cos^2 y = \cos(x - y) \end{cases}$$

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۵-  $A, B, C$ ، ۳ نقطه متمایز روی نمودار  $y = x^2$  هستند طوری که  $AB$  موازی محور  $x$ هاست و مثلث  $ABC$  قائم‌الزاویه با مساحت ۱۳۸۷ است. مجموع ارقام مؤلفه‌ی  $y$  از  $C$  چند است؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۲۰ (۳) ۲۶ (۴) ۳۶

۶- دستگاه معادلات مقابل در اعداد صحیح دارای چند جواب سه تایی  $(x, y, z)$  است؟  

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۷- پارکینگی ۱۶ جا در یک ردیف دارد. ۱۲ راننده از راه می‌رسند که هر کدام اتومبیلشان ۱ جا را اشغال می‌کند و به صورت تصادفی در پارکینگ پارک می‌کند. سعید با کامیونش که ۲ جای کنار هم می‌خواهد از راه می‌رسد. احتمال اینکه سعید بتواند پارک کند چقدر است؟

- (۱)  $\frac{11}{20}$  (۲)  $\frac{4}{7}$  (۳)  $\frac{81}{140}$  (۴)  $\frac{17}{28}$

۸-  $A_n = (0, 0)$  نقاط متمایز  $A_1, A_2, \dots$  روی محور  $x$ ها هستند و نقاط متمایز  $B_1, B_2, \dots$  روی نمودار  $y = \sqrt{x}$  قرار دارند. برای هر  $n \in \mathbb{N}$  یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. کوچکترین  $n$ ی را بیابید که  $A_n A_{n-1} B_n \geq 100$ .

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷ (۴) ۱۹

محل محاسبات:

۹-  $ABCD$  یک دوزنقه است که  $AB \parallel CD$ ،  $AB = 11$ ،  $BC = 5$ ،  $CD = 19$  و  $DA = 7$ . نیمسازهای زوایای  $\hat{A}$  و  $\hat{D}$  در  $P$  یکدیگر را قطع می‌کنند و نیمسازهای زوایای  $B$  و  $C$  در  $Q$ . مساحت شش ضلعی  $ABQCDP$  برابر است با:

- (۱)  $28\sqrt{3}$  (۲)  $30\sqrt{3}$  (۳)  $32\sqrt{3}$  (۴)  $35\sqrt{3}$

۱۰- چند جفت عدد طبیعی  $(a, b)$  وجود دارند که  $(a, b) = 1$ ،  $\frac{14b}{9a} + \frac{a}{b}$  عددی صحیح است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) بینهایت

۱۱- معادله  $x^2 + y^2 = y^4$  در مجموع اعداد صحیح دارای چند زوج جواب  $(x, y)$  است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۲- تعداد توابع  $f: R \rightarrow R$  که در رابطه  $f(x) + 2(f(1-x))^2 = 2$  صدق می‌کنند چند تا است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) بینهایت جواب

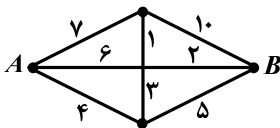
۱۳- به چند طریق می‌توان ۴ نقطه در صفحه طوری قرار داد که فواصل دو به دو آنها تنها دو عدد باشند؟ (شکل‌هایی که با هم متشابه هستند را یکی می‌گیریم)

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۴- ۲۷ نقطه شبکه‌ای مکعبی  $3 \times 3 \times 3$  تشکیل داده‌اند (مراکز مکعباتی که از تقسیم یک مکعب به ۲۷ مکعب کوچک حاصل می‌شوند) چند مجموعه‌ی ۳ تایی از این نقاط روی یک خط قرار دارند؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۴۸ (۳) ۴۳ (۴) ۴۹

۱۵- در شکل زیر شبکه‌ای از لوله‌های آب داریم که نقاط  $A$  و  $B$  را به هم وصل کرده‌اند (آب منبع است). حداکثر میزان ظرفیت آب عبوری از هر لوله (لیتر بر ثانیه) روی شکل نشان داده شده است. نقطه‌ی  $B$  حداکثر چند لیتر بر ثانیه آب میتواند دریافت کند؟



- (۱) ۱۳

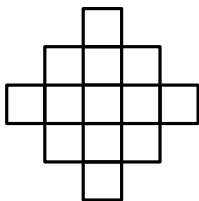
- (۲) ۱۷

- (۳) ۱۵

- (۴) ۱۱

محل محاسبات:

۱۶- در شکل زیر ۳۶ چوب کبریت تشکیل ۱۳ مربع  $1 \times 1$  داده‌اند. حداقل چند چوب کبریت باید برداریم تا دیگر مربعی در شکل دیده نشود؟



۸ (۱)

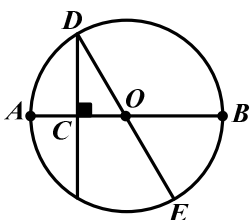
۹ (۲)

۱۰ (۳)

۱۱ (۴)

۱۷- فرض کنید  $C$  نقطه‌ای روی قطر  $AB$  دایره‌ای باشد و  $2AC = BC$ .  $D$  و  $E$  نقطه‌هایی دیگر روی دایره‌اند به طوری که

$DC \perp AB$  و  $DE$  قطر دیگر دایره است. مقدار  $\frac{S_{DCE}}{S_{ABD}}$  چقدر است؟ ( $S_{xyz}$  مساحت مثلث  $xyz$  است).



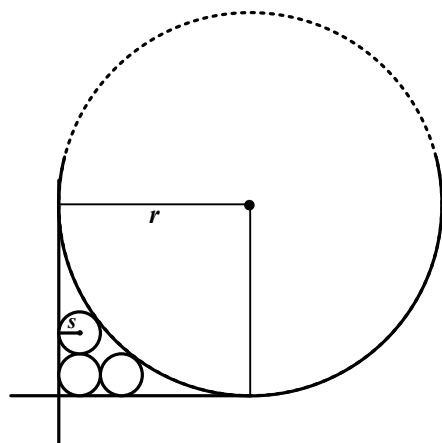
$\frac{1}{6}$  (۱)

$\frac{1}{4}$  (۲)

$\frac{1}{3}$  (۳)

$\frac{1}{2}$  (۴)

۱۸- در ربع اول صفحه‌ی  $xy$  سه دایره به شعاع  $k$  رسم شده‌اند. دایره‌ی اول بر هر دو محور مماس است، دایره‌ی دوم بر محور  $x$  و دایره‌ی اول مماس است و دایره‌ی سوم بر محور  $y$  و دایره‌ی با شعاع  $r$  بر هر دو محور و دایره‌های دوم و سوم مماس است. نسبت  $\frac{r}{S}$  کدام است؟



۵ (۱)

۶ (۲)

۸ (۳)

۹ (۴)

محل محاسبات:

۱۹- فرض کنید  $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$  به ازای چند، چند جمله‌ای مانند  $Q(x)$  چند جمله‌ی درجه‌ی سوم  $P(x)$  وجود دارد که  $P(Q(x)) = P(x) \cdot R(x)$  ؟

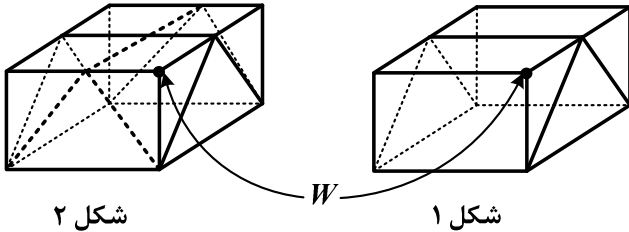
- ۱۹ (۱) ۲۲ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

۲۰- فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$  فرض کنید  $f^{(2)}(x) = f(f(x))$  و به ازای هر عدد طبیعی  $n \geq 2$  داریم

$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(f(x))$ ، به ازای چند  $x$  در بازه‌ی  $[\frac{1}{4}, 1]$   $f^{(2008)}(x) = \frac{1}{4}$ .

- ۲۰۰۸ (۱) ۴۰۱۶ (۲) ۲۰۰۸<sup>۲</sup> (۳) ۲۰۰۸ (۴)

۲۱- مکعب واحد را دو بار بریده‌ایم تا سه منشور بدست آید که دو تای آنها هم نهشتند (شکل زیر ۱) سپس مکعب را دوباره به همان روش در امتداد خطهای نقطه‌چین در شکل ۲ بریده‌ایم که این بار ۹ قطعه حاصل شده است (شکل ۲). حجم قطعه‌ای که شامل رأس  $W$  است چقدر است؟



شکل ۲

شکل ۱

- (۱)  $\frac{1}{12}$   
(۲)  $\frac{1}{9}$   
(۳)  $\frac{1}{8}$   
(۴)  $\frac{1}{6}$

۲۲- به ازای چند  $b \in \mathbb{R}$ ،  $b + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  اما برای هر  $n \geq 2$ ،  $b^n + (\sqrt{2})^n \in \mathbb{Q}$ .

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بینهایت (۴) هیچ

۲۳- معادله‌ی  $x^2 + y^2 + 5x + 5y - 2xy = 1500$  در  $N$  چند جواب  $(x, y)$  دارد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۱۷

۲۴- دنباله‌ی  $a_k = \frac{1}{k^2 + k}$  برای  $k \geq 1$  تعریف شده است. اگر برای  $m$  و  $n$  طبیعی که  $m < n$   $a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} = \frac{1}{29}$

در این صورت  $m + n$  کدام مقدار زیر است؟

- (۱) ۷۶۰ (۲) ۸۴۰ (۳) ۶۱۰ (۴) ۹۰۰

محل محاسبات:

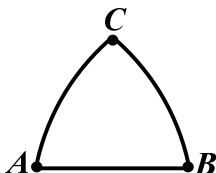
۲۵- اگر  $a, b \in R$  و ناصفر باشند و  $ab = a - b$ ، کدام مقدار زیر برای  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$  مقدور است؟

- (۱)  $\frac{1}{2}$  (۲)  $-\frac{1}{2}$  (۳)  $-2$  (۴)  $2$

۲۶- حاصلضرب اعضای چند زیرمجموعه ناتهی از  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  بر ۶ بخشیدنی است؟

- (۱) ۸۷۰ (۲) ۸۷۱ (۳) ۸۷۲ (۴) ۸۷۳

۲۷- اگر دو دایره به مراکز  $A$  و  $B$  و شعاعهای  $AB$  مطابق شکل داشته باشیم و دایره‌ی  $w$  در پاره‌خط  $AB$  و کمان  $AC$  و  $BC$  مماس باشد، در این صورت اگر  $AB = 2$ ، شعاع  $w$  هست:



- (۱)  $\frac{2}{3}$  (۲)  $\frac{2}{4}$  (۳)  $\frac{3}{4}$  (۴)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۸- می‌دانیم که  $\frac{((3!)!)!}{3!} = k.n!$  که  $n$  و  $k$  طبیعی‌اند و  $n$  بیشترین مقدار ممکن است،  $n + k$  چقدر است؟

- (۱) ۸۳۹ (۲) ۸۴۰ (۳) ۸۴۱ (۴) ۸۳۸

۲۹- اگر  $N$  بزرگترین مضرب ۸ باشد که هیچ دو رقم آن برابر نیستند باقیمانده‌ی  $N$  بر ۱۱ چیست؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۳۰- مجموع لگاریتم در مبنای ۱۰ مقسوم‌علیه‌های  $10^n$  هست ۷۹۲،  $n$  چیست؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

کمیته علمی المپیاد ریاضی باشگاه دانش‌پژوهان بسیج

ردیف	نام و نام خانوادگی	سمت	رنگ مدال المپیادی	سال کسب مدال	کشوری	جهانی (نام کشور)
۱	سید حسام فیروزی	مسئول کمیته علمی	طلا طلا	۲۰۰۷ ۸۶	ایران	ویتنام
۲	سعید هادی خانلو	عضو کمیته علمی	نقره طلا	۲۰۰۷ ۸۶	ایران	ویتنام
۳	شایان دشمیز	عضو کمیته علمی	نقره طلا	۲۰۰۷ ۸۶	ایران	ویتنام